





## مفاهيم أساسية:

## (١) عزم قوة بالنسبة لنقطة:

$\therefore \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$  ومن تعريف الضرب الاتجاهي نجد أن:

$$\vec{M}_O = (\|\vec{r}\| \|\vec{F}\| \sin \theta) \vec{u}$$

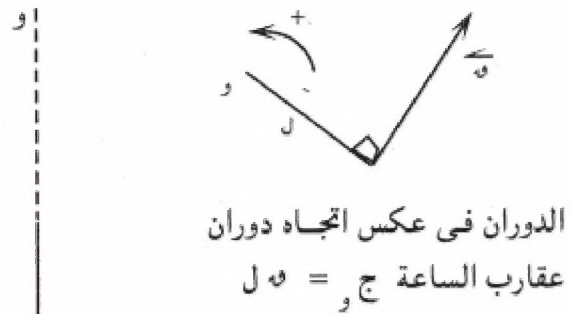
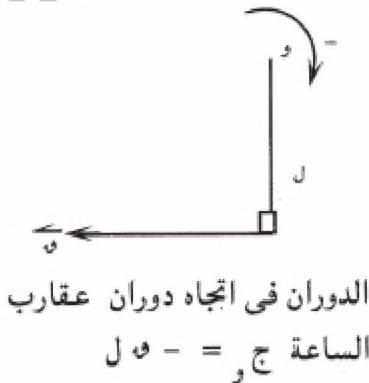
حيث  $\vec{u}$  متجه وحده عمودى على مستوى  $\vec{r}$ ،  $\vec{F}$

وبفرض أن:  $\|\vec{r}\| = r$ ،  $\|\vec{F}\| = F$ ، طول العمود الساقط من (و) على خط عمل  $\vec{F}$  هو  $l$  فمن الشكل السابق نجد أن:  $l = r \sin \theta$

$$\therefore \vec{M}_O = F l \vec{u}$$

## (٢) القياس الجبرى للعزم:

- القياس الجبرى لمتجه العزم حول نقطة يكون موجب إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول النقطة فى اتجاه عكس عقارب الساعة
- القياس الجبرى لمتجه العزم حول نقطة يكون سالب إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول النقطة فى اتجاه مع عقارب الساعة



حيث  $l =$  مقدار القوة ،  $\vec{M}_O =$  طول العمود الساقط من النقطة المطلوب حولها العزم على خط عمل القوة ويسمى (ل) ذراع القوة أو ذراع العزم كما تسمى النقطة المطلوب حولها العزم مركز العزم

## (٣) معيار العزم:

$$\|\vec{M}_O\| = F l$$

معيار العزم هو  $\|\vec{M}_O\|$  ويكون

$\therefore$  معيار عزم قوة حول نقطة = معيار القوة  $\times$  طول العمود الساقط من النقطة على خط عمل القوة



$$\frac{||\overset{\curvearrowright}{\text{ج}}||}{\text{و}} = \text{و} \therefore$$

وحدة قياس مقدار العزم = وحدة قياس مقدار القوة  $\times$  وحدة قياس الطول  
 أى أن وحدة قياس العزم هي: نيوتن . متر أو دايين . سم أو ث كجم . متر

إذا كانت  $\vec{s}$  ،  $\vec{v}$  ،  $\vec{e}$  مجموعة يمينية لمتجهات الوحدة وكانت  $\vec{u} = \vec{s} - \vec{v}$  ،  $\vec{v}$  تؤثر في النقطة  $P(2, 3)$  أوجد:

٢) عزم القوة  $\vec{U}$  بالنسبة للنقطة ب (٢، ١).

٥٠  
**ب) طول العمود الساقط من النقطة ب على خط عمل القوة.**

$$(2,0) = (1,2) - (3,2) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \quad (9)$$

$$\frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2} (1 \times 2 - (2 -) \times 1) = (2 - 1) \times (2 - 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \therefore$$

$$\frac{2}{5\sqrt{2}} = \frac{2}{2(2-) + 2\sqrt{2}} = \frac{||\vec{r}_{ج}||}{v} = 1 \text{ (ب)}$$

تؤثر القوتان  $\vec{F}_1 = \vec{s}_2 + \vec{s}_1$ ،  $\vec{F}_2 = \vec{s}_1 - \vec{s}_2$  في النقطتين  $A(1, 1)$ ،  $B(1, -1)$  على الترتيب عين قيمة كل من الثابتين  $s_1$ ،  $s_2$  بحيث ينعلم مجموع عزمي هاتين القوتين حول نقطة الأصل وحول النقطة ب  $(2, 3)$

### العزوم حول نقطة الأصل و (٠،٠)

$$(2-1-1) = \overline{\sqrt{p}} = \overline{\sqrt{s}} \quad , \quad (1-1-1) = \overline{\sqrt{p}} = \overline{\sqrt{s}}$$

∴ مجموع عزمى القوتين حول نقطة الأصل يساوى صفر

$$0 = (1, -1) \times (2, -1) + (2, 2) \times (1, 1) \therefore \vec{O} = \vec{r_1} \times \vec{r_2} + \vec{r_3} \times \vec{r_4}$$

$$(1) \quad 3 = 2 + 1 \therefore 0 = 2 + 1 + 2 - 2$$

العزوم حول نقطة ب (2, 3)

$$(2, -1) = (3, 2) - (1, 1) = \vec{b} - \vec{r_1} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = \vec{r_3}$$

$$(5, -3) = (3, 2) - (2, -1) = \vec{b} - \vec{r_2} = \vec{r_4} - \vec{r_2} = \vec{r_5}$$

∴ مجموع عزمى القوتين حول نقطة ب يساوى صفر

$$\vec{O} = \vec{r_1} \times \vec{r_2} + \vec{r_3} \times \vec{r_4}$$

$$0 = (1, -1) \times (5, -3) + (2, 2) \times (2, -1)$$

$$(2) \quad 1 = 5 + 2 \therefore 0 = 5 + 3 + 2 - 2$$

بحل المعادلتين (1)، (2) جبرياً بضرب المعادلة الأولى  $\times 2$  وجمعها مع المعادلة الثانية

$$\frac{7}{9} = 1 \therefore 7 = 9 \quad \text{بالتعويض فى (1)}$$

$$\frac{13}{9} = 2 \therefore$$

$$3 + \frac{14}{9} = 2 \therefore 3 = \frac{7}{9} \times 2 + 2 - 2$$

### مثال:

إذا كان  $||\vec{r}|| = 0$  وكانت  $\vec{r}$  تعمل فى  $\vec{AB}$  حيث  $P(3, 1)$  ،  $B(4, 1)$

أوجد عزم  $\vec{r}$  حول نقطة الأصل

### الحل:

$$\therefore \vec{r} \text{ تعمل فى } \vec{AB} \therefore \vec{r} = \text{مقياس } \vec{r} \times \text{متجه الوحدة فى اتجاه } \vec{AB}$$

$$\therefore \vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (4, 1) - (3, 1) = (1, 0)$$

$$\therefore \vec{r} = \frac{(3, 4)}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{\vec{AB}}{||\vec{AB}||} = \frac{(1, 0)}{1} = (1, 0)$$

$$\therefore \vec{r} = (||\vec{r}||) \vec{r} = (10) \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = (6, 8)$$



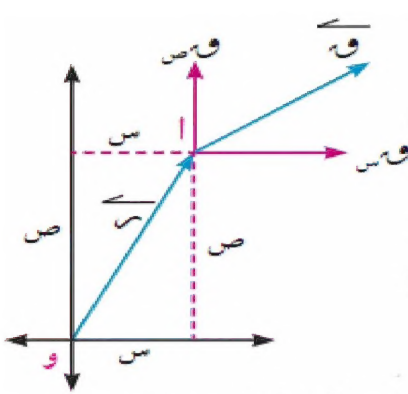
$$\therefore \overline{r} = \overline{w} = (1, 3-)$$

$$\therefore \overline{w} = \overline{r} \times \overline{u} = (1, 3-) \times (9, 12) = (27, 36) = \overline{w} = (27, 36)$$

ملاحظة: يمكن إيجاد عزم  $\overline{u}$  حول نقطة الأصل بأخذ  $\overline{r} = \overline{w}$  وسنحصل على نفس النتيجة.

### مبدأ العزوم (نظرية فارينون):

عزم القوة  $\overline{u}$  بالنسبة لنقطة يساوي مجموع عزوم مركبات هذه القوة بالنسبة لنفس النقطة.



فإذا كانت  $\overline{u} = \overline{u}_x + \overline{u}_y$  تؤثر في نقطة P

وكان متجه موضع نقطة P هو  $\overline{r} = (x, y)$

فإن عزم  $\overline{u}$  حول O يكون:

$$\overline{w} = \overline{r} \times \overline{u} = (x, y) \times (u_x, u_y)$$

$$\therefore \overline{w} = (x u_y - y u_x) \hat{k} = \overline{w}_x + \overline{w}_y = \text{عزم } u_x \text{ حول O} + \text{عزم } u_y \text{ حول O}$$



### مثال:

في الشكل المقابل:

احسب القياس الجبري لعزم القوة 100 نيوتن بالنسبة لنقطة P

### الحل:

نحلل القوة 100 نيوتن إلى مركبتين:

$$u_x = 100 \cos 40^\circ = 76.6 \text{ نيوتن}$$

$$u_y = 100 \sin 40^\circ = 64.3 \text{ نيوتن}$$

وطبقاً لنظرية فارينون يكون:

$$\overline{w} = \text{عزم } u_x \text{ حول P} + \text{عزم } u_y \text{ حول P}$$

$$\overline{w} = -100 \times 1.4 + 64.3 \times 0.4 = -140 + 25.72 = -114.28 \text{ نيوتن متر}$$



## نظرية:

مجموع عزوم عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة بالنسبة لأى نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة نفس النقطة

البرهان:

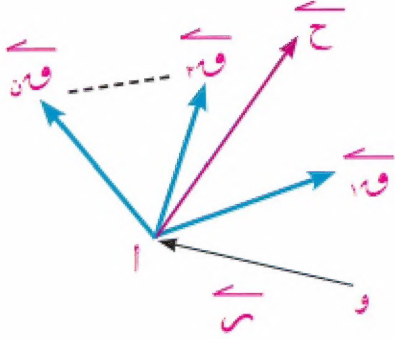
بفرض أن  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n$  مجموعة من القوى متلاقية

فى نقطة  $P$  وأن محصلتها هى  $\vec{R}$  ، نقطة  $O$  هى مركز العزم  
 $\therefore$  مجموع عزوم القوى حول  $O$

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{r}_3 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{r}_n =$$

$$\vec{R} \times \vec{r} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \dots + \vec{r}_n) \times \vec{r} =$$

$\therefore$  مجموع عزوم القوى حول  $O$  = عزم محصلة هذه القوى حول نفس النقطة  $O$



## مثال:

تؤثر القوى  $\vec{r}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_3$  فى النقطة  $P(1, -4)$   
 أوجد مجموع عزوم هذه القوى حول  $B(1, 1)$  ثم أوجد عزم محصلة هذه القوى حول  $B$  ماذا تلاحظ؟

## الحل:

$$\therefore \vec{r} = \vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}_3 = (1, 1) - (1, -4) = (0, 5)$$

$$\therefore \text{مجموع عزوم القوى حول } B = \vec{r}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{r}_3 =$$

$$= (3, -2) \times (3, -2) + (1, -3) \times (3, -2) =$$

$$= \vec{r}_1(6+6) + \vec{r}_2(9-2) =$$

$$= \vec{r}_1 12 + \vec{r}_2 7 =$$

$$\therefore \text{محصلة القوى } \vec{R} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 = (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) + (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 =$$

$$\therefore \text{وتؤثر فى نقطة } P(1, 1) \therefore \vec{r} = \vec{r}_1 = \vec{r}_2 = (3, -2)$$

$$\therefore \text{عزم محصلة القوى حول } B = \vec{R} \times \vec{r} = (4, -1) \times (3, -2) =$$



$$\bar{C} \cdot 5 = \bar{C} (3 - 8) = \bar{C} (3 \times 1 - (4-) \times (2-)) =$$

نلاحظ أن مجموع عزوم القوى حول ب = عزم محصلة هذه القوى حول ب

### النظرية العامة للعزوم:

المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول نقطة يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة

### نتائج هامة:

- (١) المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول أى نقطة على خط المحصلة يساوى صفراً
- (٢) إذا كان المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول نقطة يساوى صفراً فإما أن تكون المحصلة مساوية للصفر أو يكون خط عمل المحصلة يمر بهذه النقطة
- (٣) إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول  $P =$  مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول  $B$  فإن خط عمل المحصلة  $\parallel \overrightarrow{PB}$
- (٤) إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول  $J = -$  مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول  $S$  فإن خط عمل المحصلة ينصف  $\overline{JS}$

### مثال:

أوجد مربع طول ضلعه ١٠ سم، أثرت القوى ٢٠، ٣٠، ٤٠، ٥٠، ٧٠، ٢٢ نيوتن فى  $\overrightarrow{PB}$ ،  $\overrightarrow{B\Gamma}$ ،  $\overrightarrow{J\Gamma}$ ،  $\overrightarrow{D\Gamma}$  على الترتيب احسب المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول الرأس ب وحول مركز المربع.

### الحل:

الشكل مربع .: الأبعاد العمودية للقوى التى فى الأضلاع معلومة

ولإيجاد البعد العمودى للقوة التى تعمل فى  $\overrightarrow{P\Gamma}$  نرسم  $\overrightarrow{B\Gamma} \perp \overrightarrow{P\Gamma}$

من المثلث  $\overrightarrow{P\Gamma B}$  نجد أن:

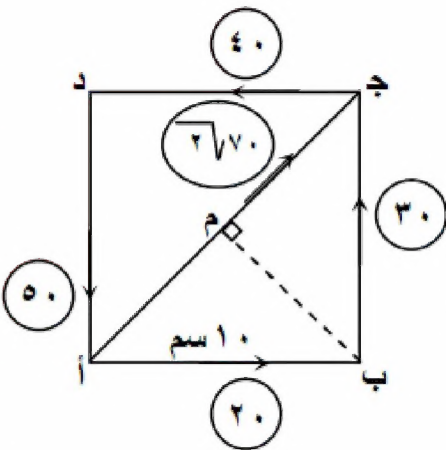
$$B\Gamma = \overrightarrow{P\Gamma} \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 10 = 5\sqrt{2} \text{ سم}$$

العزوم حول ب:

القوى التى تمر بالنقطة ب يكون عزمها = ٠

$$\therefore E_B = 22 \times 5\sqrt{2} - 10 \times 50 + 10 \times 40 + 0 + 0 =$$

$$= 200 - 500 + 400 + 0 + 0 = 100 \text{ نيوتن.سم}$$



العزوم حول م:

البعد العمودي لجميع القوى ثابت ويساوى نصف طول الضلع

$$\therefore \text{ع.م} = 70 \times \sqrt{2} + 50 \times 50 + 50 \times 40 + 50 \times 30 + 50 \times 20 =$$

$$= 700 + 2500 + 2000 + 1500 + 1000 = 7000 \text{ نيوتن.سم}$$

حل آخر:

يتم تحليل القوة المائلة في  $\vec{P}$  إلى مركبتين  $U$ ،  $V$  في اتجاهي  $\vec{AB}$ ،  $\vec{AD}$  حيث

$$U = 70 \times \sqrt{2} \cos 45^\circ = 70 \text{ نيوتن}$$

$$V = 70 \times \sqrt{2} \sin 45^\circ = 70 \text{ نيوتن}$$

العزوم حول ب:

القوى التي تمر بالنقطة ب يكون عزمها = 0

$$\therefore \text{ع.ب} = 10 \times 70 - 10 \times 50 + 10 \times 40 =$$

$$= 700 - 500 + 400 = 600 \text{ نيوتن.سم}$$

العزوم حول م:

البعد العمودي لجميع القوى ثابت ويساوى نصف طول الضلع

$$\therefore \text{ع.م} = 50 \times 70 - 50 \times 70 + 50 \times 50 + 50 \times 40 + 50 \times 30 + 50 \times 20 =$$

$$= 1400 \times 50 = 70000 \text{ نيوتن.سم}$$

تذكر أن:

(١) في المربع القطران متساويان ، ومتعامدان ، وينصف كل منهما الآخر ، وينصف كل منهما زاويتي الرأسين الواصل بينهما .

$$(٢) \text{ طول قطر المربع} = \sqrt{2} \times \text{طول ضلعه}$$

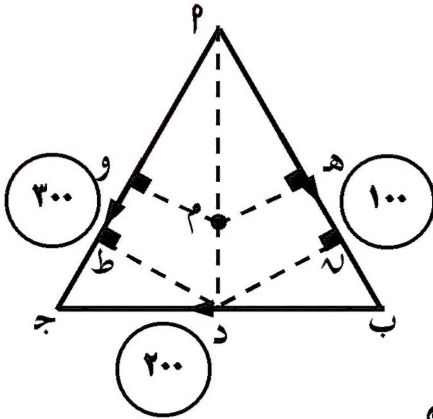
مثال:

أ ب ج مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٢٠ سم ، أثرت القوى ١٠٠ ، ٢٠٠ ، ٣٠٠ نيوتن في  $\vec{AB}$ ،  $\vec{BC}$ ،  $\vec{CA}$  على الترتيب احسب المجموع الجبري لعزوم هذه القوىأولاً: حول نقطة ارتفاعات المثلث ثانياً: حول منتصف  $\vec{BC}$ 

الحل:



العزوم حول ك:



$$\therefore S_P = S_A = 56 \text{ ج.ك.} \quad \therefore S_P = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 20 = 56 \text{ سم}$$

$$\therefore S_2 = S_3 = S_1 \quad \therefore S_2 = S_3 = S_1 = \frac{1}{3} S_P$$

$$\therefore S_2 = S_3 = S_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 10 = 56 \text{ سم}$$

$$\therefore E = (300 + 200 - 100) \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 100 \text{ نيوتن.سم}$$

العزوم حول منتصف بـ ج:

$$\therefore S_B = S_C = 56 \text{ ج.ك.} \quad \therefore S_B = S_C = \frac{1}{2} \times 20 = 10 \text{ سم}$$

$$\therefore S_D = S_E = 56 \text{ سم}$$

$$\therefore E = 300 \times \sqrt{3} + 100 \times \sqrt{3} = 100 \text{ نيوتن.سم}$$

حل آخر:

يتم تحليل القوى المائلة في  $\overline{AB}$  وفي  $\overline{AC}$  إلى مركبتين في اتجاهين متعامدين وتطبيق نظرية فارينون

$$100 \text{ نيوتن هما: } 100 \text{ ج.ك.} = 56 \text{ سم}, \quad 100 \text{ ج.ك.} = 56 \text{ سم}$$

$$300 \text{ نيوتن هما: } 300 \text{ ج.ك.} = 150 \text{ سم}, \quad 300 \text{ ج.ك.} = 150 \text{ سم}$$

العزوم حول ك:

$$\therefore S_P = S_A = 56 \text{ ج.ك.} \quad \therefore S_P = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 20 = 56 \text{ سم}$$

$$\therefore S_2 = S_3 = S_1 \quad \therefore S_2 = S_3 = S_1 = \frac{1}{3} S_P$$

$$\therefore S_2 = S_3 = S_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 10 = 56 \text{ سم}$$

$$\therefore E = (100 - 200 - 50) \times \frac{\sqrt{3}}{3} + 10 \times (\sqrt{3} - \sqrt{3}) = 100 \text{ نيوتن.سم}$$

$$= 100 \text{ نيوتن.سم}$$

العزوم حول منتصف بـ ج:

$$\therefore E = 100 \times \sqrt{3} - 100 \times \sqrt{3} = 100 \text{ نيوتن.سم}$$

- فى أى مثلث نقطة تقاطع المتوسطات تقسم المتوسط بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة
- فى المثلث المتساوى الأضلاع تكون نقطة تقاطع المتوسطات هى نقطة تقاطع الإرتفاعات هى نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة
- فى المثلث القائم يكون طول العمود الساقط من رأس القائمة على الوتر يساوى حاصل ضرب طولاه ضلعى القائمة مقسوما على طول الوتر
- طول الضلع المقابل لزاوية = طول الوتر × جيب (جا) الزاوية
- طول الضلع المجاور لزاوية = طول الوتر × جيب تمام (جتا) الزاوية

تؤثر القوة  $\vec{F}$  في النقطة  $P(-3, 2)$  فإذا كان عزم  $\vec{M}$  حول النقطتين  $B(3, 1)$  ،  $J(-1, 4)$  يساوي  $28 \hat{e}$  أوجد  $\vec{u}$  .

## تذکرہ ان:

هو المتجه الواصل من  
مركز العزم إلى أى نقطة  
على خط عمل القوة

نفرض أن  $\overline{u} = \overline{m} + \overline{n}$   
العزم حول ب:

$$(1, 7-) = (1, 3-) - (2, 3-) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} = \frac{1}{7} \therefore$$

$$\frac{1}{x} 28 = \frac{1}{x} \therefore \frac{1}{x} (2 - 06-) = (0, 2) \times (1, 6-) = \frac{1}{0} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \therefore$$

$$(1) \quad 28 = 2 - 06- \therefore$$

### العزم حول ج:

$$(2, 2) = (2, 1) - (2, 3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \therefore$$

$$\frac{1}{x} 28 = \frac{1}{x} \therefore \frac{1}{x} (22 + 02-) = (0, 2) \times (2-, 02-) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \therefore$$

$$(2) \quad 28 = 22 + 02- \therefore$$

## بضرب المعادلة الأولى $\times 2$

$$\therefore 56 = 22 - 01 \quad \therefore 28 = 22 + 06 \quad \text{بالجمع}$$

$$\therefore \frac{14-}{14} = 0 \therefore 14 = 0 \quad \leftarrow \quad \therefore 14 = 0 \quad 14- = 0 \quad \text{بالتعويض في (1)}$$



$$28 = 2 - (6-) \times 6- \therefore 28 - 36 = 2- \therefore 28 = 2- \leftarrow$$

$$\therefore \overline{2} = \overline{2} + \overline{6-} \leftarrow \therefore \overline{2} = \overline{2} - \overline{6-}$$

### مثال:

تؤثر القوى  $\overline{2} = \overline{2} + \overline{6-}$ ،  $\overline{3} = \overline{3} - \overline{4-}$ ،  $\overline{4} = \overline{4} - \overline{3-}$  في النقطة  $P(2, 0)$  وكانت النقط ب  $(2-, 3-)$ ، ج  $(3, 2)$ ، د  $(1, 2-)$ ، هـ  $(0, 0)$  برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة:

أولاً: يمر بنقطة ب      ثانياً: ينصف جـ د      ثالثاً: يوازى د هـ

### الحل:

$$\overline{1} + \overline{2} + \overline{3} = \overline{6}$$

$$\overline{4} - \overline{3} = (\overline{2} - \overline{3-}) + (\overline{3} - \overline{4-}) + (\overline{2} + \overline{3-}) =$$

عزم المحصلة حول ب:

$$\therefore \overline{3} = \overline{4} - \overline{1} = \overline{3} - \overline{2-} = \overline{2-} - \overline{3} = \overline{4} - \overline{3-}$$

$$\therefore \overline{6} = \overline{3} \times \overline{4} = \overline{4} \times \overline{3-} = \overline{6} = \overline{6} \times \overline{1} = \overline{6}$$

$$\therefore \overline{6} = \overline{6} \therefore \text{خط عمل المحصلة يمر بنقطة ب وهو المطلوب أولاً}$$

عزم المحصلة حول جـ:

$$\therefore \overline{3} = \overline{4} - \overline{1} = \overline{3} - \overline{2-} = \overline{2-} - \overline{3} = \overline{4} - \overline{3-}$$

$$\therefore \overline{6} = \overline{3} \times \overline{4} = \overline{4} \times \overline{3-} = \overline{6} = \overline{6} \times \overline{1} = \overline{6}$$

عزم المحصلة حول د:

$$\therefore \overline{3} = \overline{4} - \overline{1} = \overline{3} - \overline{2-} = \overline{2-} - \overline{3} = \overline{4} - \overline{3-}$$

$$\therefore \overline{6} = \overline{3} \times \overline{4} = \overline{4} \times \overline{3-} = \overline{6} = \overline{6} \times \overline{1} = \overline{6}$$

$$\therefore \overline{6} = \overline{6} \therefore \text{خط عمل المحصلة ينصف جـ د وهو المطلوب ثانياً}$$



عزم المحصلة حول ه :

$$\therefore \overline{R_H} = \overline{H_H} = \overline{P_H} - \overline{H} = (2, 0) - (0, 5) = (2, -5) = (3, -5)$$

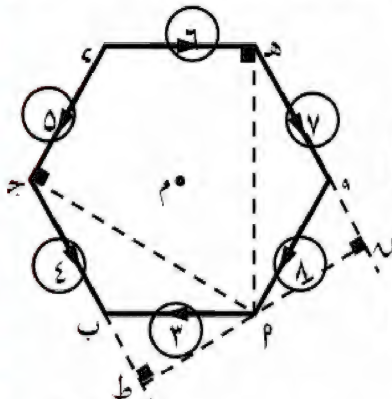
$$\therefore \overline{E_H} = \overline{R_H} \times \overline{E} = (3, -5) \times (9 + 2, 0) = (4, 3) \times (3, -5) = (11, -1) \quad (3)$$

من (2)، (3)  $\therefore \overline{E_H} = \overline{R_H}$   $\therefore$  خط عمل المحصلة يوازي  $\overline{EH}$  وهو المطلوب ثالثا

### مثال:

٢ ب ج د ه و مسدس منتظم طول ضلعه ١٠ سم، أثرت القوى ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨ نيوتن في ٢ ب، ج، د، ه، و، و  $\overrightarrow{AP}$  على الترتيب اوجد المجموع الجبرى لعزوم القوى: حول الرأس ٢ وحول مركز المسدس

### الحل:



العزوم حول ٢: القوتان ٨، ٣ عزمها حول ٢ = ٠

$$\overline{AP} = \overline{AP} = \frac{\overline{AP} \times 10}{2} = \frac{\overline{AP} \times 10}{2} = \overline{AP} \times 5 \text{ سم}$$

$$\overline{AP} \times 5 = \overline{AP} \times 10 = \overline{AP} \times 10 = \overline{AP} \times 10 \text{ سم}$$

$$\therefore \overline{E_H} = \overline{AP} \times 5 + \overline{AP} \times 5 + \overline{AP} \times 5 - \overline{AP} \times 5 = \overline{AP} \times 5$$

$$= \overline{AP} \times 5 = \overline{AP} \times 5 = \overline{AP} \times 5 = \overline{AP} \times 5 \text{ نيوتن. سم}$$

العزوم حول مركز المسدس م:

الأبعاد العمودية بين مركز المسدس وخطوط عمل جميع القوى ستكون متساوية

$$\frac{\overline{AP} \times 10}{2} = \text{وعموما طول العمود الساقط من مركز المسدس على أى ضلع من الأضلاع}$$

$$\therefore \text{البعد العمودى لجميع القوى} = \frac{\overline{AP} \times 10}{2} = \frac{\overline{AP} \times 10}{2} = \overline{AP} \times 5 \text{ سم}$$

$$\therefore \overline{E_H} = \overline{AP} \times 5 = \overline{AP} \times 5 = \overline{AP} \times 5 = \overline{AP} \times 5 \text{ نيوتن. سم}$$

تذكر أن: فى السداسى المنتظم إذا كان طول ضلعه = ل فإن:

(١) جميع الأضلاع متساوية = ل وجميع الزوايا متساوية وقياس كل منها ١٢٠°

(٢) طول القطر الواصل بين رأسين غير متتالين =  $\overline{AP} \times 2$

(٣) طول القطر الواصل بين رأسين متقابلين = ٢ل



## عزم قوة بالنسبة لنقطة فى نظام إحداثى ثلاثى الأبعاد

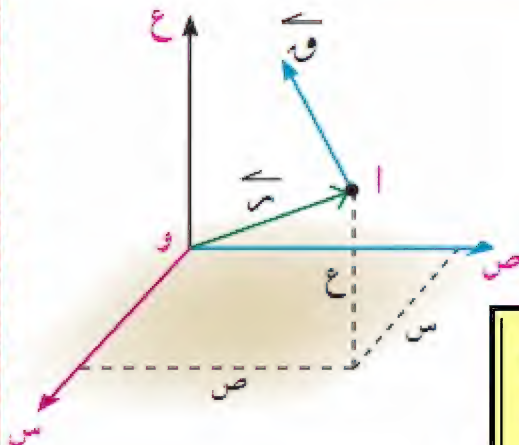
٢-٢

عزم قوة حول نقطة فى الفراغ:

إذا كانت  $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$

وكان  $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$  متجه موضع النقطة P

فإن عزم القوة  $\vec{r} \times \vec{F}$  بالنسبة للنقطة (و) يساوى



$$\begin{vmatrix} \vec{r}_x & \vec{r}_y & \vec{r}_z \\ \vec{F}_x & \vec{F}_y & \vec{F}_z \\ \vec{r}_x & \vec{r}_y & \vec{r}_z \end{vmatrix} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_O$$

ويكون طول العمود المرسوم من النقطة (و) على خط عمل القوة هو (ل) حيث:

$$\frac{||\vec{M}_O||}{||\vec{r}||} = l$$

مثال:

أوجد عزم القوة  $\vec{r}$  بالنسبة لنقطة الأصل حيث  $\vec{r} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$  وتؤثر فى نقطة P التى متجه موضعها هو  $\vec{r} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  وأوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة  $\vec{r}$ .

الحل:

$$\therefore \vec{r} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = (1, 1, 1)$$

$$\therefore \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = (1, 1, 1) \times (2, -3, 5) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$



$$\overrightarrow{C}(2 \times 1 + 3 \times 1) + \overrightarrow{V}(2 \times 1 + 5 \times 1) - \overrightarrow{S}(3 \times 1 - 5 \times 1) =$$

$$\therefore \overrightarrow{C} = 2\overrightarrow{S} - 7\overrightarrow{V} + 5\overrightarrow{C} \text{ وحدة عزم}$$

$$\therefore L = \frac{||\overrightarrow{C}||}{||\overrightarrow{V}||} = \frac{\sqrt{41}}{19} = \frac{\sqrt{25 + 2(7-2) + 22}}{\sqrt{25 + 23 + 2(2-)}} = 1,4 \text{ وحدة طول}$$

### مثال:

إذا كانت القوة  $\overrightarrow{U} = 2\overrightarrow{S} + 3\overrightarrow{V} - \overrightarrow{C}$  تؤثر فى نقطة  $P(1, -1, 4)$  أوجد:

أ) عزم القوة  $\overrightarrow{U}$  حول نقطة الأصل  $O(0, 0, 0)$

ب) عزم القوة  $\overrightarrow{U}$  حول نقطة  $B(2, -3, 1)$  وطول العمود المرسوم من  $B$  على خط عمل القوة.

### الحل:

$$\text{أ) } \therefore \overrightarrow{U} = \overrightarrow{P} - \overrightarrow{O} = \overrightarrow{P} = (1, -1, 4)$$

$$\therefore \overrightarrow{C} \times \overrightarrow{U} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{C} & \overrightarrow{V} & \overrightarrow{S} \\ 4 & 1- & 1 \\ 1- & 3 & 2 \end{vmatrix} = (1- , 3, 2) \times (4, 1- , 1) = \overrightarrow{U} \times \overrightarrow{C} = \overrightarrow{C} \times \overrightarrow{U}$$

$$\overrightarrow{C}(2 \times 1 + 3 \times 1) + \overrightarrow{V}(4 \times 2 - 1 \times 1) - \overrightarrow{S}(4 \times 3 - 1 \times 1) =$$

$$\therefore \overrightarrow{C} = 11\overrightarrow{S} + 9\overrightarrow{V} + 5\overrightarrow{C} \text{ وحدة عزم}$$

$$\text{ب) } \therefore \overrightarrow{U} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{P} = \overrightarrow{B} = (3, 2, 1-)$$

$$\therefore \overrightarrow{C} \times \overrightarrow{U} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{C} & \overrightarrow{V} & \overrightarrow{S} \\ 3 & 2 & 1- \\ 1- & 3 & 2 \end{vmatrix} = (1- , 3, 2) \times (3, 2, 1-) = \overrightarrow{U} \times \overrightarrow{C} = \overrightarrow{C} \times \overrightarrow{U}$$

$$\overrightarrow{C}(2 \times 2 - 3 \times 1-) + \overrightarrow{V}(3 \times 2 - 1 \times 1) - \overrightarrow{S}(3 \times 3 - 2 \times 1-) =$$

$$\therefore \vec{C} = -\vec{s} + \vec{v} - \vec{w} \quad \text{وحدة عزم}$$

$$\therefore L = \frac{||\vec{C}||}{||\vec{v}||} = \frac{\sqrt{2(7-)^ + 25 + 2(11-)^}}{\sqrt{2(1-)^ + 23 + 22}} = 3,73 \quad \text{وحدة طول}$$

### مثال:

في الشكل المقابل:

قوة مقدارها ١٣٠ نيوتن تؤثر في القطر AB في متوازي مستطيلات

ابعاده ٣م ، ٤م ، ١٢م كما بالشكل أوجد عزم القوة  $\vec{C}$  حول النقطة S

### الحل:

من هندسة الشكل إحداثيات النقط هي:

$$P = (3, 0, 0), \quad B = (0, 12, 4), \quad S = (0, 12, 0)$$

$$\therefore \vec{PB} = B - P = (0, 12, 4) - (3, 0, 0) = (-3, 12, 4)$$

$$\therefore ||\vec{PB}|| = \sqrt{(-3)^2 + 12^2 + 4^2} = 13$$

$$\therefore \vec{C} = \frac{(-3, 12, 4)}{13} \times 130 = (-30, 120, 40)$$

$$\therefore \vec{r} = \vec{SB} = B - S = (0, 12, 4) - (0, 12, 0) = (0, 0, 4)$$

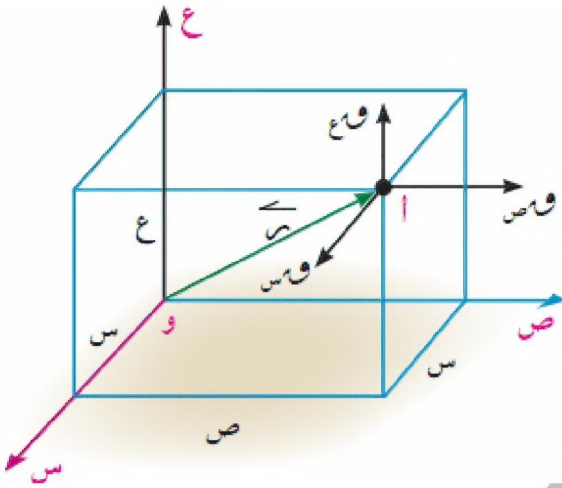
$$\therefore \vec{C} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e} & \vec{v} & \vec{w} \\ -30 & 120 & 40 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-30, -120, 40) \times (0, 0, 4) = \vec{C} \times \vec{r} = \vec{C_s}$$

$$= \vec{e}(-120 \times 4) + \vec{v}(-30 \times 4) - \vec{w}(0 - 0) =$$

$$\therefore \vec{C_s} = -120\vec{v} - 120\vec{e} \quad \text{وحدة عزم}$$



### المركبات الاحداثية لعزم قوة بالنسبة لنقطة:



بفرض  $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z) = (س, ص, ع)$  تؤثر في نقطة P

متجه موضعها حول نقطة الأصل  $\vec{r} = (س, ص, ع)$

فإن عزم القوة  $\vec{M}$  بالنسبة للنقطة (و) يساوي

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ س & ص & ع \\ ع & ص & س \end{vmatrix}$$

$$= (\vec{e}_x(صس - عص) + \vec{e}_y(عس - صع) + \vec{e}_z(صع - عس))$$

أي أن عزم القوة  $\vec{M}$  له ٣ مركبات هي:

مركبة في اتجاه محور س ومركبة في اتجاه محور ص ومركبة في اتجاه محور ع

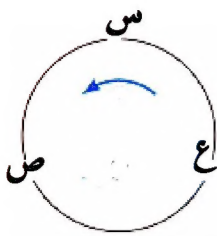
وبأخذ عزم  $\vec{M}$  ،  $\vec{M}_s$  ،  $\vec{M}_v$  ،  $\vec{M}_e$  حول محاور س نجد أن:

$\vec{M}_s$  ليس لها عزم دوراني حول محور س لأنها توازي محور س أي أن عزمها يساوي صفر

$\vec{M}_v$  ، تعمل على الدوران حول محور س في اتجاه عقارب الساعة فيكون عزمها  $-\vec{M}_v \times ع$

$\vec{M}_e$  ، تعمل على الدوران حول محور س في اتجاه عكس عقارب الساعة فيكون عزمها  $\vec{M}_e \times ص$

∴ مركبة العزم في اتجاه محور س تساوي  $\vec{M}_e \times ص - \vec{M}_v \times ع$



وبالمثل بالنسبة لمركبات العزم في اتجاه ص، ع

∴ مركبة العزم في اتجاه محور ص تساوي  $\vec{M}_e \times س - \vec{M}_s \times ع$

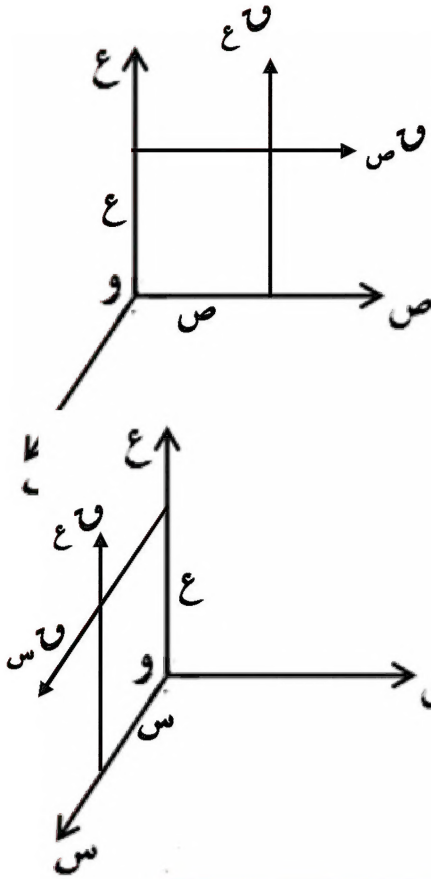
∴ مركبة العزم في اتجاه محور ع تساوي  $\vec{M}_s \times ص - \vec{M}_v \times س$

### مثال:

إذا كانت  $\vec{M} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y - 3\vec{e}_z$  تؤثر في نقطة P التي متجه موضعها بالنسبة لنقطة

الأصل هو  $\vec{r} = (3, 1, 1)$  فإذا كانت مركبتا عزم  $\vec{M}$  حول محوري س، ص هما ١ - ، ٨ -

على الترتيب أوجد قيمة كل من  $\vec{e}_x$  ،  $\vec{e}_y$  .

**الحل:**

$$\therefore \vec{U} = \vec{K} = \vec{S} + \vec{V} - \vec{E} = 3 - 2 = 1$$

$$\therefore \vec{U} = \vec{K} = \vec{S} = 3, \vec{V} = 2, \vec{E} = -2$$

$$\therefore \vec{R} = (1, 1, 3)$$

$$\therefore \vec{S} = 3, \vec{V} = 1, \vec{E} = 1$$

$$\therefore \text{مركبة عزم القوة حول محور س} = \vec{U} \cdot \vec{S} - \vec{E} \cdot \vec{V} = 1 - 2 = -1$$

$$\therefore -1 = 1 - 2 \times 1$$

$$\boxed{1 - 2 = -1}$$

$$\therefore 1 + 2 = 3$$

$$\therefore \text{مركبة عزم القوة حول محور ص} = \vec{U} \cdot \vec{V} - \vec{S} \cdot \vec{E} = 1 - 3 = -2$$

$$\therefore -2 = 1 \times 1 - 3 \times 1$$

$$\boxed{1 - 3 = -2}$$

$$\therefore 1 - 3 = -2$$

**مثال:**

إذا كانت  $\vec{U} = 3\vec{S} + \vec{K} + \vec{V} + \vec{E}$  تؤثر فى نقطة  $P = (1, 0, 1)$  وكان عزم  $\vec{U}$  بالنسبة لنقطة  $B = (2, 1, 3)$  يساوى  $12$   $\vec{S} - 8\vec{V} - 5\vec{E}$  فما قيمة  $K$ .

**الحل:**

$$\vec{R} = \vec{B} - \vec{P} = \vec{B} - \vec{P}$$

$$= (2, 1, 3) - (1, 0, 1) = (1, 1, 2)$$

$$\therefore \vec{S} = 1, \vec{V} = 1, \vec{E} = 2$$

$$\therefore \vec{U} = 3\vec{S} + \vec{K} + \vec{V} + \vec{E} = 3 + K + 1 + 2 = 6 + K$$

$$\therefore \vec{U} = 6 + K, \vec{S} = 3, \vec{V} = 1, \vec{E} = 2$$

$$\therefore \text{مركبة عزم القوة حول محور س} = \vec{U} \cdot \vec{S} - \vec{E} \cdot \vec{V} = 12 - 4 = 8$$

$$\therefore 8 = 12 - 4 = 8 \therefore 8 = 12 - 4 = 8$$

$$\therefore K = 2$$



تذكر أن:

$\vec{R}$  هو المتجه الواصل من مركز العزم إلى أى نقطة على خط عمل القوة